Další příklady

Cvičení 1. Uvažujme n různých dopisů a n různých obálek s již nadepsanou adresou. Zmatená sekretářka umístí dopisy do obálek zcela náhodně.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že je alespoň jeden dopis ve správné obálce?

(b) Spočtěte limitu této pravděpodobnosti pro $n \to \infty$ a zjistěte, jak se tato limita liší od přesného výsledku pro $n = 5$ a $n = 10$.

Řešení. (a) Očíslujeme dopisy čísly 1,...,n a stejně tak i příslušné obálky. Buď π permutace na množině $\{1, ..., n\}$, tj. zobrazení $(1, ..., n) \mapsto (i_1, ..., i_n)$ aneb po složkách $\pi(j) = i_j \in \{1, ..., n\}$. Množina všech výsledků pokusu je rovná množině všech permutací na množině {1,...,n} a zadání lze tedy formulovat jako pravděpodobnost, že náhodně zvolená permutace má alespoň jeden **pevný bod**, tj. existuje $i \in \{1, ..., n\}$, že $\pi(i) = i$. Označme tento jev A. Tento jev lze zapsat jako sjednocení jednodušších jevů

$$A = \cup_{i=1}^n A_i,$$

kde $A_i = \{\pi \in \omega; \pi(i) = i\}$. Víme, že $|\Omega| = n!$ a $|A_i| = (n-1)!$. Stejně tak je snadno vidět, že $|A_i \cap A_j| = (n-2)!$ pro $i \neq j$. Takto můžeme pokračovat a vidíme, že

$$|A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}| = (n-k)!,$$

a tedy $\mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$.

Nyní již stačí jen použít princip inkluze a exkluze pro výpočet pravděpodobnosti sjednocení a dostaneme

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\cup_{i=1}^n A_i) = n\frac{(n-1)!}{n!} - \binom{n}{2}\frac{(n-2)!}{n!} + ... + (-1)^{n+1}\frac{1}{n!} = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{k!}.$$

(b) Dle Leibnizova kritéria pro konvergenci alternující řady $\mathbb{P}(A)$ konverguje pro $n \to \infty$ a její limita je rovna e^{-1}

Cvičení 2. Uvažujte třídu n osob.

(a) S jakou pravděpodobností v této třídě existuje alespoň jedna osoba, která má narozeniny na Štědrý den? Vyčíslete pro $n = 30$ a $n = 100$.

(b) Jaká je pravděpodobnost, že v této třídě existují dva lidé, kteří mají narozeniny ve stejný den?

(c) Kolik nejméně osob musí být ve třídě, aby pravděpodobnost z (b) byla vyšší než 1/2? Pro jednoduchost vždy uvažujte, že rok má 365 dní a že se lidé rodí rovnoměrně během roku.

Řešení. (a) Označme jev A = [alespoň jedna osoba má narozeniny na Štědrý den]. Pravděpodobnost tohoto jevu spočítáme pomocí doplňkové pravděpodobnosti

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \left(\frac{364}{365}\right)^n$$

(b) Označme jev A = [dva lidé mají narozeniny ve stejný den]. Opět je jednodušší použít doplňkovou pravděpodobnos

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{365 * 364 * ...(365 - n + 1)}{365^n}$$

Cvičení 3. V krabici máme b bílých a a černých koulí. Postupně je taháme ven bez vracení.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že vytáhneme bílou kouli v prvním tahu? A ve druhém?

(b) Jaká je pravděpodobnost, že (n + 1)-ní tažená koule bude bílá?

Řešení. Příklad odpovídá konceptu "Pólyova schématu".
(a) $\mathbb{P}$(1. vytažená je bílá) $= \frac{b}{a+b}$. Dále z věty o úplné pravděpodobnosti

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\text{2. vytažená je bílá}) &= \mathbb{P}(\text{2. je bílá}|\text{1. je bílá}) \cdot \mathbb{P}(\text{1. je bílá}) + \mathbb{P}(\text{2. je bílá}|\text{1. je černá}) \cdot \mathbb{P}(\text{1. je černá}) \\ &= \frac{b-1}{a+b-1} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{b}{a+b-1} \cdot \frac{a}{a+b} \\ &= ... = \frac{a}{a+b}\end{aligned}$$

(b) Celkový počet způsobů, kterým lze vytáhnout postupně $(a+b)$ koulí je $(a+b)!$. Celkový počet příznivých jevů je $b(a+b-1)!$ (odpovídá fixování $(n+1)$. pozice a náhodně rozdělenému zbytku). Tedy

$$\mathbb{P}(\text{(n+1). vytažená je bílá}) = \frac{b}{a+b}$$

pro $n \leq a+b-1$, jinak je to 0.

Cvičení 4. Na cvičení z Pravděpodobnosti a statistiky se r studentů rozděluje do n paralelek cvičení. Předpokládejme, že každý student si vybírá skupinu náhodně a že počet studentů ve skupinách je neomezený.

(a) Zvolme jednu pevnou paralelku. Určete pravděpodobnost, že se na ní přihlásí právě k studentů.

(b) Jaká je pravděpodobnost, že na $i-$tém cvičení bude právě k_i studentů pro všechny $i = 1, ..., n$?

(c) Spočítejte limitu pravděpodobnosti z bodu (a) pro $n \to \infty$, $r \to \infty$ tak, že $r/n \to \lambda > 0$.

Řešení. (a) Označme $X =$ počet studentů ve vybrané paralelce. Pak X může nabývat hodnoty z $\{0, ..., r\}$. Pravděpodobnost, že jeden konkrétní student zvolí tuto paralelku je $1/n =: p$. Pro $k \in \{0, ..., r\}$ pak

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{r}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{r-k}.$$

V tomto případě X má tzv. binomické rozdělení s parametry $r, \frac{1}{n}$ ($X \sim \mathrm{Bi}(r, \frac{1}{n})$).
(b) Označme $X_i =$ počet studentů na i-té paralelce. Stejně jako v (a) platí $X_i \sim \mathrm{Bi}(r, \frac{1}{n})$. Chceme, aby platilo $X_1 + ... + X_n = r$. Pak pro $k_1, ..., k_n$ takové, že $k_1 + ... + k_n = r$ platí

$$\mathbb{P}(X_1 = k_1, ..., X_n = k_n) = \frac{r!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{1}{n}\right)^{k_1} \cdots \left(\frac{1}{n}\right)^{k_n} = \frac{r!}{k_1! \cdots k_n!} \left(\frac{1}{n}\right)^r.$$

Tento předpis odpovídá tzv. multinomickému rozdělení ($(X_1, ..., X_n) \sim \mathrm{Multi}(r, \frac{1}{n}, ..., \frac{1}{n})$).
Označme $p := \frac{1}{n}$. Hledáme limitní rozdělení pro $\mathrm{Bi}(r, p)$, tj. pro $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{p \to 0, r \to \infty, rp \to \lambda > 0} \binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k} = ?$$

Rozepsáním faktoriálů a použitím asymptotické rovnosti $\simeq$ dostaneme

$$\begin{aligned}\binom{r}{k} p^k (1-p)^{r-k} &\simeq \frac{r(r-1)\cdots(r-k+1)}{k!} \left(\frac{\lambda}{r}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)^{r-k} \\ &\simeq \frac{\lambda}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{r}\right)^r \left(\frac{\lambda}{r}\right)^{-k} \\ &\simeq \frac{\lambda}{k!} \cdot e^{-\lambda} \cdot 1\end{aligned}$$

Alternativně lze použít Stirlingovu formuli pro rozpis faktoriálů. Co jsme dostali, je předpis pravděpodobnosti k událostí tzv. Poissonova rozdělení s parametrem λ, kde tento parametr můžeme interpretovat jako očekávaný počet událostí.

Cvičení 5. Tři lovci vystřelili současně na divokého kance. Pravděpodobnosti zásahu jsou po řadě rovny 0.2, 0.4 a 0.6 a lovci střílí nezávisle na sobě.

(a) S jakou pravděpodobností kance zastřelil první střelec, byl-li kanec zasažen jedinou střelou?

(b) Nechť náhodná veličina X udává počet střel, které zasáhly kance. Určete rozdělení X a nakreslete distribuční funkci.

Řešení. (a) Pravděpodobnost podmínky (tj jevu, že byl kanec střelen právě jednou střelou). Ta je $\frac{58}{125}$. Pravděpodobnost průniku s jevem, že kance zastřelil první lovec, je $\frac{6}{125}$. Přímo z definice podmíněné pravděpodobnosti dostaneme celkový výsledek $\frac{3}{29}$.
(b) Rozdělení je jednoznačně určeno pravděpodobnostmi $p_k = \mathbb{P}(X = k), k = 0, 1, 2, 3$, kde

$$p_0 = \frac{24}{125}, p_1 = \frac{58}{125}, p_2 = \frac{37}{125}, p_3 = \frac{6}{125}.$$

$\mathbb{P}(X = x) = 0$ pro $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\}$.

Cvičení 6. V krabici je N čokoládových bonbónů, z nichž je K plněno karamelovou náplní. Vyberete si z krabice náhodně n bonbónů. Nechť X značí počet vytažených bonbónů s karamelovou náplní.

(a) Určete rozdělení X.

(b) Spočítejte střední hodnotu X.

(c) Spočítejte rozptyl X.

(V bodech (b) a (c) využijte, že X můžeme napsat jako součet (závislých) 0-1 veličin.)

Řešení. (a) Náhodná veličina X je diskrétní, stačí nám tedy určit pravděpodobnosti $p_k := \mathbb{P}(X = k)$,

$$p_k = \frac{\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}, \quad k \in \{\max(n - N + K, 0), \dots, \min(K, n)\}.$$

(b) **1. možnost (kladivem na mouchu):** Výpočet je třeba rozdělit na čtyři možností

1. $K \le n, n + k \le N$, tj. uvažujeme $k \in \{0, ..., K\}$
2. $K > n, n + k \le N$, tj. uvažujeme $k \in \{0, ..., n\}$
3. $K \le n, n + k > N$, tj. uvažujeme $k \in \{n - N + K, ..., K\}$
4. $K > n, n + k > N$, tj. uvažujeme $k \in \{n - N + K, ..., n\}$

Pak například pro 1. možnost dosazujeme do definice střední hodnoty

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{K} kp_k = \sum_{k=1}^{K} kp_k = \sum_{k=1}^{K} \frac{k\binom{K}{k}\binom{N-K}{n-k}}{\binom{N}{n}}$$

Snadno vidíme, že $k\binom{K}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$, tedy

$$\mathbb{E}X = \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=1}^{K} \binom{n-1}{k-1}\binom{N-K}{n-k} = \frac{n}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{K-1} \binom{n-1}{k}\binom{N-K+1-1}{n-k-1}$$
$$= \frac{n\binom{N-1}{K-1}}{\binom{N}{n}} \sum_{k=0}^{K-1} \frac{\binom{n-1}{k}\binom{N-1-(K-1)}{n-1-k}}{\binom{N-1}{K-1}}$$

V sumě nyní sčítáme všechny přípustné pravděpodobnosti hypergeometrického rozdělení s parametry $N - 1, K - 1, n - 1$. Suma je tedy rovna 1 a dostáváme

$$\mathbb{E}X = \frac{n\binom{N-1}{K-1}}{\binom{N}{n}} = n\frac{K}{N}.$$

Pro možnosti 2.-4. je výpočet analogický a výsledek totožný.

2. možnost (inteligentní přístup): Označme

$$Y_i = \mathbf{1}\{\text{v i-tém tahu jsme vytáhli karamelovou}\}, i = 1, \dots, n.$$

Náhodné veličiny $Y_1, \dots, Y_n$ jsou závislé, mají alternativní rozdělení a platí

$$X = \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Pro střední hodnotu X tedy dostáváme vztah

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}\sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}Y_i = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(Y_i = 1).$$

Pravděpodobnosti $\mathbb{P}(Y_i = 1), i = 1, ..., n$ dostaneme z věty o úplné pravděpodobnosti:

$$\mathbb{P}(Y_1 = 1) = \frac{K}{N},$$

$$\mathbb{P}(Y_2 = 1) = \mathbb{P}(Y_2 = 1|Y_1 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1) + \mathbb{P}(Y_2 = 1|Y_1 = 0)\mathbb{P}(Y_1 = 0) = \frac{K-1}{N-1}\frac{K}{N} + \frac{K}{N-1}\left(1 - \frac{K}{N}\right) = \frac{K}{N},$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y_3 = 1) &= \mathbb{P}(Y_3 = 1|Y_1 = 1, Y_2 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1, Y_2 = 1) + \mathbb{P}(Y_3 = 1|Y_1 = 0, Y_2 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 1)\\ &+ \mathbb{P}(Y_3 = 1|Y_1 = 0, Y_2 = 0)\mathbb{P}(Y_1 = 0, Y_2 = 0) + \mathbb{P}(Y_3 = 1|Y_1 = 1, Y_2 = 0)\mathbb{P}(Y_1 = 1, Y_2 = 0)\\ &= \mathbb{P}(Y_3 = 1|Y_1 = 1, Y_2 = 1)\mathbb{P}(Y_2 = 1|Y_1 = 1)\mathbb{P}(Y_1 = 1) + ...\\ &= \frac{K}{N}\end{aligned}$$

Stejný výsledek dostaneme pro každé $i \in \{1, ..., n\}$, a tedy $\mathbb{E}X = n\frac{K}{N}$.

(c) Stejný rozklad na součet závislých alternativních veličin použijeme i pro výpočet rozptylu a dostaneme

$$\text{var}X = n\frac{K(N-K)(N-n)}{N^2(N-1)}.$$

Cvičení 7. Předpokládejte, že máme k dispozici perfektní generátor náhodných čísel z intervalu [0, 1]. Označme jako X náhodnou veličinu, která nám udává vygenerované číslo.

(a) Jakým způsobem popíšeme rozdělení X? Zapište a nakreslete graf.

(b) Nakreslete graf distribuční funkce. V obou obrázcích zakreslete pravděpodobnost, s jakou dostaneme číslo menší než 0.5. S jakou pravděpodobností dostaneme přesně 0.5?

(c) Získané náhodné číslo X umocníme na druhou a dostaneme tak jiné náhodné číslo Y z intervalu [0, 1]. Je rozdělení Y stejné jako rozdělení X?

(d) Jak pomocí X dostaneme náhodné číslo z intervalu $[a, b]$, kde $a < b, a, b \in \mathbb{R}$?

Řešení. (a) $X \sim R(0, 1)$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0,\\ 1 & \text{pro } x \in [0, 1],\\ 0 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

(b)

$$F(x) = \mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{pro } x < 0,\\ x & \text{pro } x \in [0, 1],\\ 1 & \text{pro } x > 1. \end{cases}$$

(c) Označme $Y = X^2$. Rozdělení náhodné veličiny je jednoznačně určeno distribuční funkcí. Stačí nám tedy porovnat distribuční funkce. Můžeme zkusit metodu pokus-omyl a porovnat je jen v jednom bodě, například v 0.5. Víme, že $F_X(0.5) = 0.5$, dále

$$F_Y(0.5) = \mathbb{P}(X^2 \leq 0.5) = \mathbb{P}(|X| \leq \sqrt{0.5}) = \mathbb{P}(-\sqrt{0.5} \leq X \leq \sqrt{0.5}) = F_X(\sqrt{0.5}) - F_X(-\sqrt{0.5}) = \sqrt{0.5} - 0,$$

rozdělení se tedy liší.

(d) Zvolme náhodnou veličinu $Y = (b-a)X + a$. Ověřte výpočtem distribuční funkce Y, že se jedná o rovnoměrné rozdělení na $[a, b]$.

Cvičení 8. Poloměr bubliny vyfouknuté z bublifuku je náhodná veličina R s rovnoměrným rozdělením na intervalu $[0, 5]$ cm.

(a) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl poloměru bubliny R.

(b) Spočtěte střední hodnotu a rozptyl objemu bubliny $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Řešení. (a) $\mathbb{E}X = \frac{5}{2}$. Obecně pro X s rovnoměrným rozdělením na $[a, b]$ máme $\mathbb{E}X = \frac{b+a}{2}$.

$\text{var}X = \frac{25}{12}$. Obecně pro X s rovnoměrným rozdělením na $[a, b]$ máme $\text{var}X = \frac{(b-a)^2}{12}$.
(b)$\mathbb{E}V = \frac{5^3}{3}\pi, \text{var}V = \frac{2}{9}\frac{5^6}{7}\pi^2$

Cvičení 9. Počet vadných pixelů na obrazovce je náhodná veličina X, která se řídí Poissonovým rozdělením s parametrem $\lambda > 0$, tj. platí $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}, k = 0, 1, 2, \ldots$

(a) Ověřte, že se skutečně jedná o pravděpodobnostní rozdělení.

(b) Spočtěte očekávaný počet vadných pixelů na obrazovce.

(c) Spočtěte rozptyl X.

Řešení. (a) Využijeme Taylorův rozvoj exponenciály: $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$.

$$\sum_k p_k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}e^{\lambda} = 1,$$

jedná se tedy o pravděpodobnostní rozdělení.

(b)

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = ... = \lambda.$$

(c)

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = ... = \lambda(\lambda + 1),$$

a tedy

$$\text{var}X = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2 = \lambda.$$

Cvičení 10. Pravděpodobnost narození dcery je stejná jako pravděpodobnost narození syna. Náhodná veličina X udává počet dcer v náhodně vybrané rodině se třemi dětmi, veličina Z udává počet mladších sester nejstaršího dítěte v téže rodině.

(a) Odvoďte rozdělení náhodného vektoru (X, Z).

(b) Jaké jsou marginální rozdělení X a Y ?

(c) Jsou veličiny X a Y nezávislé?

(d) Spočítejte kovarianci X a Z.

(e) Spočtěte korelaci X a Z.

Řešení. (a) Vektor (X, Z) nabývá hodnot v $\{0, 1, 2, 3\} \times \{0, 1, 2\}$ jeho sdružené rozdělení je dáno vnitřkem tabulky

X \ Z	0	1	2	$\sum$
0	1/8	0	0	1/8
1	1/8	1/4	0	3/8
2	0	1/4	1/8	3/8
3	0	0	1/8	1/8
$\sum$	1/4	1/2	1/4	1

(b) Marginální rozdělení X je dáno pravým sloupcem tabulky. Marginální rozdělení Z je dáno posledním řádkem tabulku.

(c) Nejsou nezávislé, neboť například

$$p_{02} = \mathbb{P}(X = 0, Z = 2) = 0 \neq \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{4} = p_0^X \cdot p_2^Z$$

(d) $\text{cov}(X, Z) = \frac{1}{2}$

(e) $\text{corr}(X, Z) = \sqrt{\frac{2}{3}}$

Cvičení 11. Náhodná veličina X udává dobu, kterou strávíte čekáním na tramvaj na Malostranském náměstí (v minutách) a náhodná veličina Y udává dobu, kterou následně strávíte čekáním na metro A ve stanici Malostranská (také v minutách). Ze zkušenosti víme, že náhodný vektor $(X, Y)^T$ má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2} e^{-x-y/2} & \text{pro } x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{jinak.} \end{cases}$$

(a) Jaké je rozdělení jednotlivých dob čekání (na tramvaj a na metro zvlášť)?

(b) Jsou doby strávené čekáním na tramvaj a na metro nezávislé?

(c) S jakou pravděpodobností je doba čekání na tramvaj delší než doba čekání na metro?

Cvičení 12. Nechť $X_1, \dots, X_n$ je náhodný výběr. Zajímá nás rozdělení $\sum_{i=1}^n X_i$.

(a) Jaké je rozdělení $\sum_{i=1}^n X_i$, mají-li X_i alternativní rozdělení $Alt(p), p \in (0, 1)$?

(b) Uvažujme nezávislé hody pravidelnou kostkou a nechť X_i udává hodnotu, která padla v hodu i. Odvoďte rozdělení součtu $X_1 + X_2$. Podobně zapište rozdělení $X_1 + X_2 + X_3$.

(c) Nechť X_i mají Poissonovo rozdělení s parametrem $\lambda > 0$. Indukcí ukažte, že $\sum_{i=1}^n X_i$ má Poissonovo rozdělení s parametrem $n\lambda$.

Cvičení 13. Zahradník má devět nerozeznatelných cibulek tulipánů. Šest z nich patří červené odrůdě a tři žluté. Zahradník si vybere čtyři cibulky.

(a) Jaké je rozdělení počtu vybraných žlutých tulipánů?

(b) Po nějaké době se zahradníkovi pět cibulek ztratí. Jaký je střední počet červených tulipánů, které mu zůstaly?

Řešení. (a) $X :=$ počet vybraných žlutých tulipánů. $X \in \{0, 1, 2, 3\}$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{3}{k}\binom{6}{4-k}}{\binom{9}{4}}, \quad k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$\mathbb{P}(X = k) = 0, \quad k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 2, 3\},$$

tj. $X \sim Hypergeom(9, 3, 4)$.

(b) $Y :=$ počet zbylých červených tulipánů. $X \sim Hypergeom(9, 6, 4)$, $\mathbb{E}X = 8/3$.

Cvičení 14. Adam a Blanka si vymysleli sázku. V krabici je 10 bílých a 5 černých koulí. Adam z nich náhodně vybere 3 a vloží je (bez podívání na barvu) do osudí. Blanka má z osudí vytáhnout jednu kouli. Pokud bude bílá vyhrává Blanka a Adam ji dá 100 Kč.

(a) Kolik má být sázka spravedlivá pro Blanku, tedy částka, kterou má Blanka vsadit, aby její střední výhra byla 0?

(b) Blanka dostane možnost 30 krát vytáhnout a opět vrátit jednu kouli, přičemž se může podívat na barvu. Jak by mohla Blanka odhadnout, jakou má pravděpodobnost vytažení bílé koule?

(c) Jaké je rozdělení Blančiny výhry?

Řešení. (a) $X :=$ počet bílých, které Adam vybere $\sim Hypergeom(15, 10, 3)$.

$Y := \mathbf{1}\{\text{Blanka vybere bílou}\} \sim Alt(2/3)$

$Z := 100 \cdot Y - v \cdot (1 - Y) \in \{100, -v\}$. Řešíme rovnici v proměnné v=vsázka Blanky

$$\mathbb{E}Z = 0.$$

Blanka má vsadit 200Kč.

(b) $\theta := \mathbb{P}(Y = 1)$, na základě pozorování $Y_1, ..., Y_{30}$ z rozdělení jako má Y definujeme odhad

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{30} \sum_{i=1}^{30} Y_i.$$

(c) $Y \sim Alt(2/3)$. Spočítáme podmíněním na hodnoty X.

Cvičení 15. V krabici se 100 výrobky je náhodný počet vadných výrobků. Víme, že tento počet má rozdělení (téměr) Poissonovo se střední hodnotou 9 a s rozptylem 9.

(a) S jakou pravděpodobností máme takové štěstí, že ve 100 krabicích je méně než 855 vadných výrobků?

(b) Jaká je střední hodnota a rozptyl bezvadných výrobků v krabici?

(c) Kolik krabic bychom si měli koupit, abychom s pravděpodobností alespoň 0,9 měli nejméně 8000 bezvadných výrobků?

Řešení. (a) Použitím CLV dostaneme výsledek 0,0668.

(b) $Y :=$ počet bezvadných výrobků v jedné krabici. $\mathbb{E}Y = 91, \text{var}Y = 9$.

(c) Použitím CLV zjistíme, že potřebujeme alespoň 89 krabic.

Cvičení 16. Náhodný vektor (X, Y) má spojité rozdělení s hustotou

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & 0 < x < y < 1, \\ 0 & \text{jinde.} \end{cases}$$

(a) Určete korelační matici tohoto náhodného vektoru.

(b) Určete pravděpodobnost $\mathbb{P}(X < Y/2)$

Řešení. (a)

$$Var(X, Y) = \begin{pmatrix} 1/18 & 1/36 \\ 1/36 & 1/18 \end{pmatrix}$$

$$Corr(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) 1/2

Cvičení 17. Zajímá nás odhad pravděpodobnosti p výskytu krátkozrakosti u náhodně vybraného obyvatele CR ve věku 18–40 let. Navrhněte experiment, pomocí kterého získáme takový odhad, a zjistěte, kolik osob musíme do experimentu zapojit, aby byl náš odhad natolik přesný, že je od skutečné hodnoty p vzdálen o méně než $0,01$ s pravděpodobností větší než 90%.

Řešení. Označme $X_i = \mathbf{1}\{\text{i-tá vybraná osoba je krátkozraká}\}$. Pak $X_i \sim Alt(p)$, a tedy $\mathbb{E}X_i = p, \text{var}X_i = p(1-p)$. Posloupnost $X_1, ..., X_n$ tvoří náhodný výběr. Parametr p lze odhadnout výběrovým průměrem $\bar{X}_n$. Tento odhad označíme $\hat{p}_n$. Hledáme $n \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\mathbb{P}\left(|\hat{p}_n - p| \leq 0.01\right) > 0.9$$

Provedením několika ekvivalentních úprav a použitím centrální limitní věty dostaneme výsledek $n > 13530$. Musíme do průzkumu zapojit alespoň 13530 osob.

Cvičení 18. Doba výpočtu (v sekundách) jedné úlohy s náhodným vstupem je náhodná veličina s rozdělením s hustotou $f(x) = 2/x^3$ pro $x \geq 1$ a $f(x) = 0$ jinak. Budeme spouštět úlohy sériově (jednu za druhou) a zajímá nás, s jakou pravděpodobností bude celková doba výpočtu 100 úloh delší než 250 sekund. Můžeme využít centrální limitní větu?

Řešení. Označme X_i =doba výpočtu i-té úlohy. Pak $X_1, X_2, ...$ tvoří náhodný výběr. Při ověřování podmínek pro použití centrální limitní věty dostaneme $\text{var}X_1 = \infty$, tuto větu tedy nelze použít.

Cvičení 19. Dokažte princip inkluze a exkluze, tj. máme-li $A_1, ..., A_n$ náhodné jevy, pak

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i).$$

Řešení. Postupujeme matematickou indukcí.

- Pro první indukční krok zvolíme $n = 2$. Pak evidentně

$$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B).$$

- Předpokládejme, že rovnost platí pro $n - 1$, tj.

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) = \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^{n}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i).$$

  Označme $A = \cup_{i=1}^{n-1} A_i$ a $B = A_n$. Nyní použijeme první indukční krok pro $\mathbb{P}(A \cup B)$, tj.

$$\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) = \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i) + \mathbb{P}(A_n) - \mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} (A_i \cap A_n)).$$

  Na první a poslední člen použijeme předpoklad, že PIE platí pro $n - 1$, tj

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) = &\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + ... + (-1)^{n}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) \\ &+ \mathbb{P}(A_n) \\ &- \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_n) + ... + (-1)^{n-2} \sum_{1 \leq j_1 < .. < j_{n-2} \leq n-1} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_{j_i} \cap A_n) + (-1)^{n-1}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n)\end{aligned}$$

Přeuspořádáním sčítanců dostaneme

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i \cup A_n) = &\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_n) \\
&- \sum_{1\le i<j\le n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) - \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_n) \\
&+ \sum_{1\le i<j<k\le n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \sum_{1\le i<j\le n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_n) \\
&+ .... + (-1)^{n-2}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) + (-1)^{n-2} \sum_{1\le j_1<..<j_{n-2}\le n-1} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_{j_i} \cap A_n) \\
&+ (-1)^{n-1}\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n)
\end{aligned}
$$

Nyní si všimneme, že platí tyto rovnosti:

$$\sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i) + \mathbb{P}(A_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i),$$

$$\sum_{1\le i<j\le n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_n) = \sum_{1\le i<j\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j),$$

$$\sum_{1\le i<j<k\le n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \sum_{1\le i<j\le n-1} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_n) = \sum_{1\le i<j<k\le n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k)$$

...

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i) + \sum_{1\le j_1<..<j_{n-2}\le n-1} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-2} A_{j_i} \cap A_n) = \sum_{1\le j_1<..<j_{n-1}\le n} \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_{j_i})$$

$$\mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n-1} A_i \cap A_n) = \mathbb{P}(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)$$

Dosazením těchto rovností již získáme platnost PIE pro n.